ETUDE DE QUELQUES INDICATEURS D'INEGALITE

Version du 5 décembre 2003

Rudi Peters
Division statistique fiscale et documentation
Administration fiscale des contributions
Eigerstrasse 65
3003 Berne
Tél. 031 322 73 87 - Fax 031 324 92 50
rudi.peters@estv.admin.ch

Avertissement

Ce document constitue quelques "notes", prises en lisant le papier "Les principales mesures d'inégalité" d'Olivier Sautory (INSEE) présenté aux journées de méthodologie statistique du 11 et 12 décembre 1996. J'ai changé quelque peu la structure du texte, j'ai apporté quelques illustrations graphiques et j'ai incorporé ci et là quelques éléments supplémentaires, déduits personnellement ou issus d'autres sources.

Ce document vise à analyser quelques indicateurs "classiques" d'inégalité:

1. Carré du coefficient de variation (chapitre 1);
2. Ecart relatif moyen (chapitre 2);
3. Variation des logarithmes (chapitre 3);
4. Coefficient de Gini (chapitre 4);
5. Ecart moyen des logarithmes (chapitre 5);
6. Indice de Theil (chapitre 6);
7. Indicateurs d'Atkinson (chapitre 7).

Ce document ne constitue qu'un "jet" rapide d'une quantité assez importante d'informations. Il m'a permis de structurer mes pensées et m'aider à comprendre dans les détails le sens de certains indicateurs. Si ce document peut encore servir à d'autres personnes, c'est tant mieux. Certaines erreurs ou incohérences pourraient encore s'y trouver. Merci pour vos éventuelles remarques.

0. Introduction

Notation

On considère une population de n individus. On note:

- x_i le revenu de l'individu i **(**$i = 1,...,n$**);**
- $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ la moyenne (arithmétique) des revenus;
- $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2$ la variance des revenus;
- $y_i = \frac{x_i}{\overline{x}}$ le revenu relatif de l'individu i ($i = 1,...,n$).

Nous noterons par $I(x_1,...,x_n)$ l'indicateur d'inégalité exprimé en fonction des revenus absolus $(x_1,...,x_n)$ et par $I_y(y_1,...,y_n)$ l'indicateur d'inégalité exprimé en fonction des revenus relatifs $(y_1,...,y_n)$.

Interprétation en terme de bien-être collectif

On peut considérer $I_y(y_1,...,y_n)$ comme la fonction opposée d'une fonction $W_y(y_1,...,y_n)$ de bien-être collectif ("welfare function"), dépendant uniquement des revenus individuels relatifs:

$$I_y(y_1,...,y_n) = -W_y(y_1,...,y_n).$$

Ecrire $W_y(y_1,...,y_n)$ comme $W_y(y_1,...,y_n) = \sum_{i=1}^{n} u(y_i)$ revient à exprimer le bien-être collectif $W_y(y_1,...,y_n)$ comme la somme des "perceptions" individuelles $u(y_i)$ du bien-être, dépendant uniquement du revenu relatif de la personne, le même pour tous les individus.

En terme économique, la valeur $u(y_i)$ correspond à l'utilité associée au revenu (relatif) y_i et la valeur $W_y(y_1,...,y_n)$ à l'utilité collective associée à la distribution des revenus (relatifs) $(y_1,...,y_n)$.

Propriétés des indicateurs

On souhaiterait généralement les propriétés suivantes aux indicateurs d'inégalité.

1. Invariant à un changement d'échelle

   Si on multiple tous les revenus par un facteur constant non nul, l'indicateur reste inchangé: $I(l\,x_1,..., l\,x_n) = I(x_1,...,x_n)$, $\forall\, l \neq 0$.

L'indicateur donnera dès lors la même valeur qu'on convertisse les revenus dans une autre devise, qu'on les exprime en francs d'une autre année, qu'on prenne les revenus relatifs $(y_1,...,y_n)$ plutôt que les revenus absolus $(x_1,...,x_n)$ ($I(x_1,...,x_n) = I_y(y_1,...,y_n)$),...

Remarque: l'invariance à une translation

Il n'est en général pas "exigé" à l'indicateur d'être insensible à une augmentation des revenus par une constante ($I(x_1+c,...,x_n+c) = I(x_1,...,x_n)$ pour $c \in \mathbb{R}$). Si par exemple, chaque individu voit son revenu augmenter de c francs, l'indice de Gini en sera diminué.

2. Minimum et maximum

On souhaiterait que l'indicateur est minimum si tous les revenus sont égaux et maximum si tous les revenus sont nuls sauf un.

Certains indicateurs présentés ci-après (à savoir les indicateurs de la variance des logarithmes, de l'écart moyen des logarithmes et d'Atkinson de paramètre négatif ($a \leq 0$) sont maxima dès qu'un revenu est nul (et pas seulement si tous les revenus sont nuls sauf un), voire tendent vers l'infini dès qu'un revenu est nul ou très petit; ceci les disqualifie si certains revenus peuvent être nuls, voire très petits.

3. Décomposition additive

On suppose la population décomposée en G classes disjointes. Certains indicateurs d'inégalité $I(x_1,...,x_n)$ peuvent être désagrégés en une composante mesurant l'inégalité entre les classes (composante inter-classe) plus une composante mesurant la variabilité au sein de chacune des classes (composante intra-classe). C'est le cas avec les indicateurs du carré du coefficient de variation, de la variance des logarithmes, de l'écart moyen des logarithmes et de l'indice de Theil; cette propriété rend ces indicateurs adaptés au cas où on veut décomposer la mesure de l'inégalité en fonction d'un facteur supposé "explicatif" (canton, état civil,...).

On note pour chaque classe g ($g = 1,...,G$):

- n_g le nombre d'observations dans la classe g ;
- $x_{g,j}$ le revenu du j ème individu de la classe g ($j = 1,...,n_g$);
- $m_g = \frac{1}{n_g}\sum_{j=1}^{n_g} y_{g,j}$ la moyenne (arithmétique) des revenus de la classe g ;
- $\vec{e}_{n_g} = (1,...1) \in \mathbb{R}^{n_g}$ le vecteur unitaire de n_g éléments.

4. Conséquence d'un transfert

Condition de Pigou-Dalton

On voudrait généralement qu'un transfert de revenu d'un riche vers un pauvre entraîne une diminution de l'indicateur d'inégalité (condition de Pigou-Dalton).

Notons qu'à l'issu d'un transfert d'un individu j vers un individu i, l'individu j peut se retrouver plus pauvre que l'individu i mais l'écart entre leur revenu devient moins grand.

Pour étudier les conséquences d'un transfert, il est parfois commode de supposer un transfert infinitésimal dh : la variation $dI_y(y_1,...,y_n)$ de la mesure $I_y(y_1,...,y_n)$ peut alors se calculer par:

$$dI_y(y_1,...,y_n) = I_y(y_1,...,y_i+dh,...,y_j-dh,...,y_n) - I_y(y_1,...,y_i,...,y_j,...y_n)$$

$$= dh\left(\frac{dI_y}{dy_i}(y_1,...,y_n) - \frac{dI_y}{dy_j}(y_1,...,y_n)\right) \quad .$$

<u>Indicateurs neutres ou normatifs</u>

L'indicateur est dit "neutre" si l'effet du transfert ne dépend pas du niveau des revenus de ces individus: on accorde la même importance à un transfert d'un riche vers un riche que d'un pauvre vers un pauvre. C'est le cas avec l'indicateur du carré du coefficient de variation et avec l'indice de Gini.

Si l'indicateur n'est pas neutre, on aura un indicateur dit "normatif". L'indicateur de l'écart relatif moyen n'est pas sensible à des transferts entre individus du même côté de la moyenne. L'indicateur de la variance des logarithmes, l'écart moyen des logarithmiques, l'indice de Theil et les indicateurs d'Atkinson accordent, à différents niveaux, plus d'importance à une inégalité parmi les pauvres que parmi les riches: un transfert d'un pauvre vers un pauvre diminue davantage l'inégalité qu'un transfert d'un riche vers un riche.

<u>Condition suffisante</u>

Si $I_y(y_1,...,y_n)$ est de la forme $I_y(y_1,...,y_n) = -\sum_{i=1}^{n} u(y_i)$, la condition de Pigou-Dalton est vérifiée si u est une fonction strictement concave (la dérivée seconde $u^{''}(y) > 0$): $dI(y_1,...,y_n) = -dh(u^{'}(y_i) - u^{'}(y_j)) < 0$. Si la dérivée seconde $u^{''}(y)$ est une constante négative, la diminution de $I_y(y_1,...,y_n)$ suite à un transfert d'un riche vers un pauvre est indépendante du niveau des revenus; l'indicateur est neutre.

<u>Compatibilité avec la courbe de Lorenz</u>

On montre que la "condition de Pigou-Dalton" est équivalente à la "condition de Lorenz" qui veut que l'ordre associé à $I(x_1,...,x_n)$ soit compatible avec l'ordre déduit de la comparaison des courbes de Lorenz: si la courbe de Lorenz de $(x_1,...,x_n)$ est plus inégalitaire (à comprendre, située en-dessous et ne la coupe en aucun point) que la courbe de Lorenz de $(z_1,...,z_n)$ alors $I(x_1,...,x_n) > I(z_1,...,z_n)$.

<u>Indicateurs vérifiant la condition de Pigou-Dalton-Lorenz</u>

La "condition de Pigou-Dalton-Lorenz" est vérifiée avec les indicateurs du carré du coefficient de variation, du coefficient de Gini, de l'écart moyen de logarithmes, de l'indice de Theil et d'Atkinson.

La "condition de Pigou-Dalton-Lorenz" n'est par contre pas vérifiée avec l'indicateur de la variance des logarithmes s'il y des revenus relatifs élevés (supérieurs à environ 2.7 fois la moyenne géométrique); ceci peut rendre cet estimateur peu adéquat à la mesure de l'inégalité.

L'indicateur de l'écart relatif moyen ne vérifie la "condition de Pigou-Dalton-Lorenz" qu'au sens large:

- un transfert d'un riche vers un pauvre ne s'accompagne pas d'une augmentation de $I(x_1,...,x_n)$: $I(x_1,...,x_n)$ peut diminuer mais peut aussi rester constant;
- si la courbe de Lorenz de $(x_1,...,x_n)$ est plus inégalitaire que la courbe de Lorenz de $(z_1,...,z_n)$ alors $I(x_1,...,x_n) \geq I(z_1,...,z_n)$: si la courbe de Lorenz de $(x_1,...,x_n)$ est plus inégalitaire que la courbe de Lorenz de $(z_1,...,z_n)$, $I(x_1,...,x_n)$ peut être plus grand que $I(z_1,...,z_n)$ mais peut aussi lui être égal.

1. Carré du coefficient de variation

Définition

Le carré du coefficient de variation au carré peut s'écrire comme:

$$CV^2(x_1,...,x_n) = \frac{s^2}{m^2} = \frac{1}{nm^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - 1)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i^2 - 1)$$

Minimum-maximum

Le coefficient de variation est compris entre 0 (tous les revenus égaux) et $\sqrt{n-1}$ (tous les revenus sont nuls sauf un).

Interprétation probabiliste

La variance peut être vue comme, en moyenne, la moitié des carrés des écarts entre deux revenus tirés aléatoirement. En effet:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i^2 - x_i x_j + x_j^2) = 2n(\sum_{i=1}^{n}x_i^2) - 2n^2 m^2 = 2n(ns^2 + nm^2) - 2n^2m^2 = 2n^2 s^2$$

Dès lors, on peut aussi interpréter le carré du coefficient de variation comme, en moyenne, la moitié des carrés des écarts entre deux revenus relatifs tirés aléatoirement:

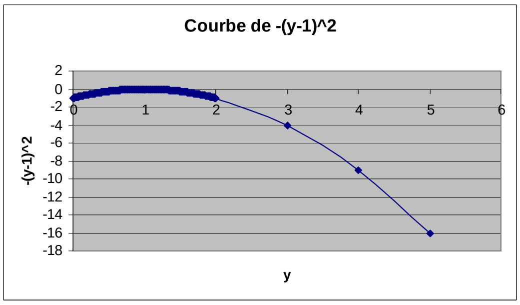
$$CV^2(x_1,...,x_n) = \frac{1}{2}\frac{E(x_i - x_j)^2}{m^2} = \frac{1}{2}E(y_i - y_j)^2$$

où $E(x_i - x_j)^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2$ et $E(y_i - y_j)^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(y_i - y_j)^2$.

Fonction d'utilité sous-jacente

Le carré du coefficient de variation $CV^2(x_1,...,x_n)$ peut s'exprimer comme une somme de perceptions individuelles de l'inégalité: $CV^2(y_1,...,y_n) = -\sum_{i=1}^{n}u(y_i)$, avec la fonction $u(y) = -\frac{1}{n}(y-1)^2$ ne dépendant que du revenu individuel y. La courbe $u(y)$ est une fonction qui:

- croît de 0 à 1 ($u(y)$ va de $-\frac{1}{n}$ à 0) et décroît ensuite;
- s'annule pour $y = 1$;
- a une concavité strictement concave et constante ($u''(y) = -\frac{2}{n} < 0$): un transfert infinitésimal dy d'un riche j vers un pauvre i entraîne une diminution constante de l'indicateur, indépendante du niveau des revenus.



Décomposition additive

On peut désagréger le carré du coefficient de variation en fonction des G classes disjointes:

$$CV^2(x_1,...,x_n) = CV^2(m_1\vec{e}_{n_1},...,m_G\vec{e}_{n_G}) + \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g m_g^2}{nm^2}CV(x_{g,1},...,x_{g,n_g})$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{g=1}^{G} n_g(1-\frac{m_g}{m})^2 + \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g m_g^2}{nm^2}\sum_{j=1}^{n_g}\frac{1}{n_g}(1-\frac{x_{g,j}}{m_g})^2$$

Le premier terme calcule le coefficient de variation sur la population où chaque revenu est remplacé par la moyenne arithmétique des revenus de sa classe (composante inter-classe).

Le deuxième terme mesure l'inégalité au sein de chacune des classes (composante intra-classe). Il est égal à la variabilité au sein de chaque classe, pondérée par le produit entre la part de revenus et la part de personnes dans la classe par rapport à la population.

Conséquence d'un transfert

La variation $dCV^2(y_1,..., y_n)$ du carré du coefficient de variation, consécutive à un transfert infinitésimal dy d'un riche j vers un pauvre i entraîne une diminution de l'indicateur égale à:

$$dCV^2(y_1,..., y_n) = \frac{2dh}{n}(y_i - y_j) < 0$$

La diminution est indépendante du niveau des revenus. Cet indice accorde donc la même importance à l'inégalité parmi les riches que parmi les pauvres.

- Preuve 1: $dCV^2(y_1,..., y_n)$ dépend de la différence $y_j - y_i$ des revenus et non du niveau des revenus;
- Preuve 2: le carré du coefficient de variation est de la forme $CV_y^2(y_1,..., y_n) = -\sum_{i=1}^{n} u(y_i)$ avec $u(y) = -\frac{1}{n}(y-1)^2$ où $u''(y) = -\frac{2}{n}(<0)$ est constante.

Remarque: indice de Theil généralisé

Nous pouvons généraliser cet estimateur de la manière suivante:

$$T_a(x_1,..., x_n) = \frac{1}{na(a-1)}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{x_i}{m}\right)^a - 1\right] = \frac{1}{na(a-1)}\sum_{i=1}^{n}(y_i^a - 1),$$

avec le paramètre a qui peut prendre n'importe quelle valeur $0 \neq a \neq 1$ (l'indice de Theil généralisé).

Cet estimateur est étendu, par un passage à la limite de $T_a(x_1,...,x_n)$ quand $a \to 0$ ou $a \to 1$ (règle de l'Hopital), à:

- $a = 0$: $T_0(x_1,...,x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{m}{x_i}$ (écart moyen des logarithmes);
- $a = 1$: $T_1(x_1,...,x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{m}\log\frac{x_i}{m}$ (indice de Theil).

La valeur de cet indicateur est compris entre 0 (tous les revenus égaux) et $+\infty$. Pour $a = 2$, l'estimateur est égal à:

$$T_a(x_1,...,x_n) = \frac{CV^2(x_1,...,x_n)}{2} \quad .$$

Le paramètre a de l'estimateur représente le poids donné aux distances entre revenus à différentes parties de la courbe de distribution. Cet estimateur est plus sensible à des transferts parmi les pauvres (transferts dans la courbe inférieure de la courbe de distribution) que parmi les riches (transferts dans la courbe supérieure de la courbe de distribution) pour des petites valeurs de a . Nous avons par exemple comme dérivée seconde de la fonction $u(y)$:

- si $a = 0$: $u''(y) = -\frac{1}{ny^2} < 0$: la dérivée seconde est de l'ordre de l'inverse du carré des revenus;
- si $a = 1$: $u''(y) = -\frac{1}{ny} < 0$: la dérivée seconde est de l'ordre de l'inverse du revenu;
- si $a = 2$, $u''(y) = -\frac{1}{n} < 0$: la dérivée seconde ne dépend plus du niveau des revenus (les transferts accordent le même poids à l'inégalité parmi les pauvres que parmi les riches).

Notons que cet indicateur peut se décomposer en fonction des G classes disjointes comme:

$$T_a(x_1,...,x_n) = CV^2(m_1\vec{e}_{n_1},...,m_G\vec{e}_{n_G}) + \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\left(\frac{m_g}{m}\right)^a T_a(x_{g,1},...,x_{g,n_g})$$

$$= \frac{1}{na(a-1)}\sum_{g=1}^{G} n_g\left[\left(\frac{m_g}{m}\right)^a - 1\right] + \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\left(\frac{m_g}{m}\right)^a \frac{1}{n_g a(a-1)}\left(\sum_{i=1}^{n_g}\left[\left(\frac{x_i}{m_g}\right)^a - 1\right]\right)$$

Le coefficient du deuxième terme dépend de la moyenne m_g du groupe et nous ne pouvons pas vraiment parler d'une décomposition entre une contribution due aux différences entre les groupes (composante inter-classe) et une contribution due à l'inégalité au sein des groupes (composante intra-classe).

2. Ecart relatif moyen

Définition

$D(x_1,...,x_n)$ est la moyenne arithmétique des valeurs absolues des écarts à la moyenne des revenus relatifs:

$$D(x_1,...,x_n) = \frac{1}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - m|}{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|y_i - 1|$$

Minimum-maximum

L'écart relatif moyen est compris entre 0 (tous les revenus sont égaux) et $\frac{n-1}{n}$ (tous les revenus sont nuls sauf un).

Interprétations

1) Interprétation comme potentiel de redistribution

$D(x_1,...,x_n)$ correspond à la proportion de la masse totale (nm) qu'il faudrait redistribuer entre les individus pour atteindre l'égalité complète (par les transferts $|x_i - m|$).

2) Interprétation statistique

$\frac{D(x_1,...,x_n)}{2}$ correspond:

- à la différence entre la proportion de la masse totale des revenus détenue par les individus "riches" (i.e. de revenu supérieur à la moyenne) et la proportion de ces individus "riches" dans la population: $\frac{D(x_1,...,x_n)}{2} = \frac{n_r m_r}{nm} - \frac{n_r}{n}$, où n_r désigne le nombre de riches et m_r le revenu moyen des riches;
- à la différence entre la proportion des individus "pauvres" (i.e. de revenu inférieur à la moyenne) dans la population et la proportion de la masse totale des revenus détenue par ces individus et: $\frac{D(x_1,...,x_n)}{2} = \frac{n_p}{n} - \frac{n_p m_p}{nm}$, où n_p désigne le nombre de pauvres et m_p le revenu moyen des pauvres.

3) Interprétation graphique

$D(x_1,...,x_n)$ correspond:

- à la distance d (à une constante multiplicative près) entre la première bissectrice et la courbe de Lorenz de la distribution, c'est-à-dire entre la première bissectrice et la tangente à la courbe de Lorenz parallèle à la première bissectrice: $D(x_1,...,x_n) = 2\sqrt{2}d$;

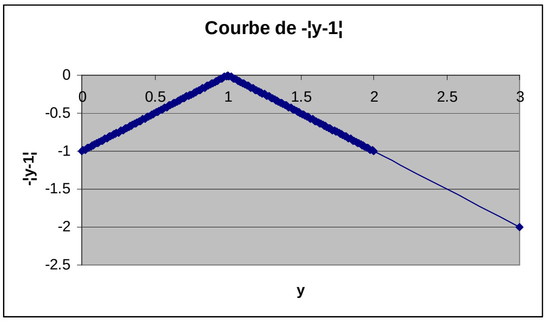
- à deux fois la distance verticale maximale $d^{'}$ entre la première bissectrice et la courbe de Lorenz: $D(x_1,...,x_n)=2d^{'}$.

Fonction d'utilité sous-jacente

L'écart relatif moyen $D(x_1,...,x_n)$ peut s'exprimer comme une somme de perceptions individuelles de l'inégalité: $CV^2(y_1,...,y_n)=-\sum_{i=1}^{n}u(y_i)$, avec la fonction $u(y)=-\frac{1}{n}|y-1|$ ne dépendant que du revenu individuel y. Chaque revenu y a le même poids.

La courbe $u(y)$ est une fonction qui:

- croît de 0 à 1 ($u(y)$ va de -1 à 0) et décroît ensuite;
- s'annule pour $y=1$;
- a un point de "rebroussement" en $y=1$ et une concavité nulle avant et après $y=1$ ($u^{''}(y)=0$, $\forall y\neq 1$): un transfert infinitésimal dy d'une personne j vers une personne i moins "riche" ($y_j>y_i$) ne modifie pas l'indicateur si les individus i et j sont tous les deux "riches" ($y_j>y_i>0$) ou tous les deux "pauvres" ($0>y_j>y_i$).



Conséquence d'un transfert

En utilisant l'interprétation 2 ci-dessus, il est facile de vérifier que la variation de l'écart relatif consécutive à un transfert vaut:

- $dD(x_1,...,x_n)=-\frac{2dh}{n}$ si $y_i<1<y_j$ i.e. si l'individu j a un revenu supérieur à la moyenne et l'individu i a un revenu inférieur à la moyenne;
- $dD(x_1,...,x_n)=0$ sinon, i.e. si les individus i et j sont tous les deux "riches" ou tous les deux "pauvres" (pas sensible à des transferts entre individus du même côté de la moyenne).

L'interprétation 3 ci-dessus permet d'illustrer le fait que la condition de Lorenz n'est vérifiée qu'au sens large: deux distributions peuvent avoir des courbes de Lorenz ayant la même tangente parallèle à la première bissectrice (donc le même écart relatif moyen) mais l'une néanmoins toujours située sous l'autre (donc l'une plus inégalitaire que l'autre).

3. Variance des logarithmes

Définition

$VL(x_1,...,x_n)$ est la variance des logarithmes des revenus:

$$VL(x_1,...,x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\log x_i - \log m^*)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\log \frac{x_i}{m^*})^2$$

où $m^* = \sqrt[n]{x_1...x_n}$ est la moyenne géométrique des revenus.

$VL(x_1,...,x_n)$ peut encore être présentée comme la variance des logarithmes des revenus relatifs:

$$VL(x_1,...,x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\log y_i - \log m_y^*)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\log \frac{y_i}{m_y^*})^2$$

où $m_y^* = \sqrt[n]{y_1...y_n}$ est la moyenne géométrique des revenus relatifs.

Remarque sur la moyenne géométrique

La moyenne géométrique des revenus relatifs est égale au rapport entre la moyenne géométrique et la moyenne arithmétique des revenus: $m_y^* = \sqrt[n]{y_1...y_n} = \frac{m^*}{m}$. Parfois, dans la littérature, la variance des logarithmes est simplement calculée par la moyenne des carrés des logarithmes des revenus relatifs. Cette approche n'est pas correcte: la moyenne géométrique des revenus n'est pas nécessairement égale à la moyenne arithmétique des revenus.

Minimum-maximum

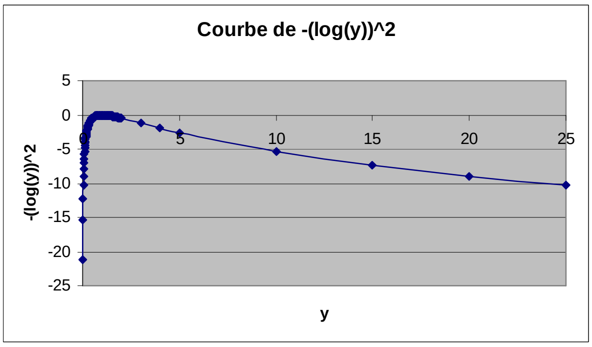
Cet indicateur est compris entre 0 (tous les revenus sont égaux) et $+\infty$ (dès qu'un revenu est nul). Ce résultat disqualifie cet indicateur si certains revenus peuvent être nuls.

Fonction d'utilité sous-jacente

Si on néglige l'effet du revenu sur la moyenne géométrique, la variance des logarithmes des revenus peut alors s'exprimer comme une somme de perceptions individuelles de l'inégalité dépendant uniquement du revenu individuel: $VL(y_1,...,y_n) = -\sum_{i=1}^{n} u(y_i)$, avec la fonction $u(y) = -\frac{1}{n}(\log \frac{y_i}{m_y^*})^2$. Sous l'hypothèse d'une moyenne géométrique m_y^* constante, la fonction $u(y)$ est une fonction qui:

- n'est pas défini en 0 : cet indicateur devient dès lors inutilisable lorsqu'il y a des revenus nuls;
- croît avant m_y^*, même très rapidement proche de 0 : cet indicateur est sensible à la présence de très petites valeurs;
- s'annule pour $y = m_y^*$ et décroît ensuite;

- a une concavité strictement concave jusqu'à $em_y^* \approx 2.7m_y^*$; après $em_y^* \approx 2.7m_y^*$ la courbe est strictement convexe entraînant que si un transfert s'effectue entre deux individus dont les revenus relatifs sont supérieurs à $em_y^* \approx 2.7m_y^*$, le transfert crée une augmentation de l'indicateur!



Décomposition additive

On peut désagréger la variance des logarithmes en fonction des G classes disjointes:

$$VL(x_1,...,x_n) = VL(m_1^*\vec{e}_{n_1},...,m_G^*\vec{e}_{n_G}) + \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}VL(x_{g,1},...,x_{g,n_g})$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{g=1}^{G} n_g(\log m^* - \log m_g^*)^2 + \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\sum_{j=1}^{n_g}\frac{1}{n_g}(\log m_g^* - \log x_{g,j})^2$$

où $m_g^* = \sqrt[n_g]{x_{g,1}...x_{g,n_g}}$ la moyenne géométrique des revenus de la classe g.

Le premier terme mesure l'inégalité entre les classes (composante inter-classe). Il est égal à la variance du logarithme sur la population où chaque logarithme de revenu est remplacé par la moyenne arithmétique des logarithmes de revenus (c'est-à-dire où chaque revenu est remplacé par la moyenne géométrique des revenus de sa classe).

Le deuxième terme mesure l'inégalité au sein de chacune des classes (composante intra-classe). Il est égal à la variabilité au sein de chaque classe, pondérée par la part de personnes dans la classe par rapport à la population.

Conséquence d'un transfert

La variation $dVL_y(y_1,...,y_n)$ de l'indicateur consécutive à un transfert infinitésimal dh d'un riche j vers un pauvre i entraîne une variation de l'indice égale à:

$$dVL_y(y_1,...,y_n) = -\frac{2dh}{n}\left(\frac{\log\frac{y_j}{m_y^*}}{y_j} - \frac{\log\frac{y_i}{m_y^*}}{y_i}\right)$$

On note les deux points suivants.

- si le transfert s'effectue entre deux individus dont les revenus relatifs sont inférieurs à $em_y^* \approx 2.7m_y^*$:
  - o il y a une diminution de l'indicateur ($dT < 0$ si $y_i < y_j \le em_y^*$);

- la diminution est d'autant plus forte que les revenus relatifs sont faibles; cet indicateur accorde plus d'importance à une inégalité parmi les pauvres.

- si le transfert s'effectue entre deux individus dont les revenus relatifs sont supérieurs à $em_y^* \approx 2.7 m_y^*$, le résultat est aberrant (la condition de Pigou-Dalton-Lorenz n'est pas vérifiée): le transfert entraîne une augmentation de l'indicateur ($dT > 0$ si $y_j > y_i \geq em_y^*$).

<u>Conclusion</u>

La variance des logarithmes n'apparaît pas comme un bon indicateur de l'inégalité:

- cet estimateur n'est pas défini pour les revenus nuls;

- cet indicateur est sensible à la présence de très petites valeurs;
- les différences relatives des revenus sont mal synthétisées par la mesure par la variance de la dispersion des logarithmes des revenus (voir la condition de Piglou-Dalton-Lorenz qui est violée).

Cet estimateur est cependant encore utilisé dans la littérature:

- pour des raisons historiques (l'utilisation de cet estimateur a été répandu dans le passé);
- pour ses possibilités de décomposition additive;
- parce qu'il n'est pas "trop" sensible à la présence de grandes valeurs dans les données;
- si on admet que la distribution des revenus suit une loi log-normale, la variance des logarithmes est alors un indicateur de dispersion tout à fait adéquat.

4. Coefficient de Gini

Définition

Notons par

- $x_{[k]}$ le revenu du k ème individu dans la suite des individus ordonnés par ordre croissant de leur revenu ($x_{[1]} \le x_{[2]} \le ... \le x_{[n]}$)
- $y_{[k]}$ le revenu relatif du k ème individu dans la suite des individus ordonnés par ordre croissant de leur revenu ($y_{[1]} \le y_{[2]} \le ... \le y_{[n]}$)

Le coefficient de Gini est égal à:

$$I(x_1,...,x_n) = \frac{1}{n^2 m}\sum_{i=1}^{n} x_{[i]}(2i-n-1) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} y_{[i]}(2i-n-1)$$

Minimum-maximum

Le coefficient de Gini est compris entre 0 (tous les revenus égaux) et $\frac{n-1}{n}$ (tous les revenus sont nuls sauf un).

Interprétations

1) Interprétation géométrique

L'indice de Gini est égal au double de l'aire comprise entre la courbe de Lorenz et la bissectrice:

$$I(x_1,...,x_n) = 1 - 2\int_0^1 L(y)dy\,,$$

où $L(y)$ représente la courbe de Lorenz associée à la distribution de revenus.

En effet, en posant $x_{[0]} = y_{[0]} = L(y_{[0]}) = 0$ et en exprimant l'intégrale de la courbe de Lorenz comme $\int_0^1 L(y)dy = \sum_{i=1}^{n}(y_{[i]} - y_{[i-1]})\frac{L(y_{[i]}) + L(y_{[i-1]})}{2}$, l'indice de Gini $I(x_1,...,x_n)$ est donné par:

$$I(x_1,...,x_n) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sum_{j=1}^{i} y_{[j]} + \sum_{j=1}^{i-1} y_{[j]}}{\sum_{j=1}^{n} y_{[j]}} = \frac{n+1}{n} - 2(\frac{n}{n^2}y_{[1]} + \frac{(n-1)}{n^2}y_{[2]} + ... + \frac{1}{n^2}y_{[n]})$$

2) Interprétation probabiliste

On peut également exprimer le coefficient de Gini comme, en moyenne, la moitié des écarts absolus entre deux revenus relatifs tirés aléatoirement:

$$I(x_1,...,x_n) = \frac{1}{2}\frac{E\left|x_i - x_j\right|}{m}$$

où $E|x_i - x_j| = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|$ est la moyenne des écarts entre les revenus.

3) Interprétation statistique

On peut également exprimer le coefficient de Gini comme deux fois la covariance $\operatorname{cov}(y_{[i]}, \frac{[i]}{n})$ entre le revenu relatif (la variable $y_{[i]}$) et le rang relatif dans l'échelle des revenus (la variable $\frac{[i]}{n}$):

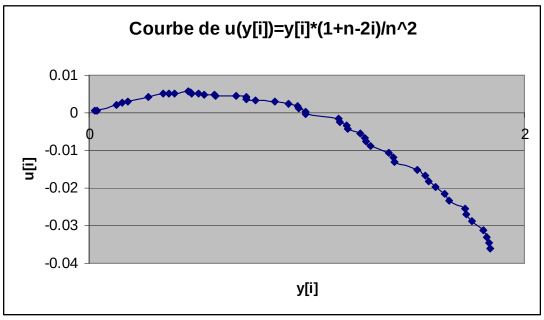
$$I(x_1,...,x_n) = 2\operatorname{cov}(y_{[i]}, \frac{[i]}{n}),$$

où $\operatorname{cov}(y_{[i]}, \frac{[i]}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_{[i]} - E(y_{[i]}))(\frac{[i]}{n} - E(\frac{[i]}{n})) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_{[i]} - 1)(\frac{[i]}{n} - \frac{n+1}{2n})$.

Fonction d'utilité sous-jacente

Le coefficient de Gini peut s'exprimer comme une somme de perceptions individuelles de l'inégalité: $I_y(y_1,...,y_n) = -\sum_{i=1}^{n} u(y_i)$ avec une fonction $u(y) = \frac{1+n-2i}{n^2} y_{[i]}$ qui ne dépend pas rien que des revenus $y_{[i]}$ mais aussi des rangs $[i]$. Les bas et les hauts revenus ont un poids plus important dans l'indice de Gini.

A titre d'exemple, nous représentons ci-après, l'allure de la courbe $u(y)$ en fonction des revenus relatifs $y_{[i]}$, pour une distribution de revenus x_i répartis aléatoirement entre 0 et 2 ($0 \le x_i < 2$). La courbe s'annule si $[i] = [\frac{n}{2} + 1]$ (au environ de la médiane) (ou si le revenu $y_{[i]}$ est nul).



Conséquence d'un transfert

La variation dT de l'indice de Theil consécutive à un transfert infinitésimal dy d'un riche j vers un pauvre i entraîne une diminution de l'indice égale à:

$$dT = -\frac{2}{n^2}(j-i)dy < 0 .$$

L'indice de Gini accorde la même importance à l'inégalité parmi les riches que parmi les pauvres: la variation dT dépend des rangs des individus et non de leurs revenus.

<u>Décomposition additive</u>

On peut désagréger la variance des logarithmes en fonction de G classes disjointes de la manière suivante:

$$I(x_1,...,x_n) = \sum_{g_1=2}^{G}\sum_{g_2=1}^{G}\left(\frac{n_{g_1}}{n}\frac{n_{g_2}m_{g_2}}{nm}+\frac{n_{g_2}}{n}\right)\frac{1}{2n_{g_1}n_{g_2}\dfrac{m_{g_1}+m_{g_2}}{2}}\sum_{i=1}^{n_{g_1}}\sum_{j=1}^{n_{g_2}}\left|x_{g_1,i}-x_{g_2,j}\right| + \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g^2 m_g}{n^2 m} I(x_{g,1},...,x_{g,n_g})$$

$$= \sum_{g_1=2}^{G}\sum_{g_2=1}^{G}\left(\frac{n_{g_1}}{n}\frac{n_{g_2}m_{g_2}}{nm}+\frac{n_{g_2}}{n}\right)\frac{1}{2n_{g_1}n_{g_2}\dfrac{m_{g_1}+m_{g_2}}{2}}\sum_{i=1}^{n_{g_1}}\sum_{j=1}^{n_{g_2}}\left|x_{g_1,i}-x_{g_2,j}\right| + \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g^2 m_g}{n^2 m}\frac{1}{2n_g^2 m_g}\sum_{i=1}^{n_g}\sum_{j=1}^{n_g}\left|x_{g,i}-x_{g,j}\right|$$

Le premier terme mesure l'inégalité entre les classes. Il ne dépend pas rien que des moyennes des classes mais aussi des combinaisons binaires de revenus. Nous ne pouvons dès lors pas vraiment parler d'une décomposition entre une contribution due aux différences entre les groupes (composante inter-classe) et une contribution due à l'inégalité au sein des groupes (composante intra-classe).

Il correspond au double de l'aire comprise entre la bissectrice et une courbe de Lorenz

- associée à la distribution de revenus où chaque revenu est égal à la moyenne arithmétique des revenus de son groupe;
- et dont l'ordre des éléments est fixé par l'ordre croissant des revenus effectifs (avant remplacement par la moyenne).

Le deuxième terme mesure l'inégalité au sein de chacune des classes. Il est égal à la variabilité au sein de chaque classe, pondérée par le produit de la part de personnes dans la classe et de la part de revenus totaux dans la classe.

La différence entre le premier terme et le coefficient de Gini $I(m_1\vec{e}_{n_1},...,m_G\vec{e}_{n_G})$ de la distribution des revenus, où chaque revenu est remplacé par la moyenne arithmétique de la classe, reflète le recouvrement des distributions des revenus entre les groupes. Si tous les revenus d'une classe sont inférieurs ou supérieurs à ceux d'une autre classe (pas de recouvrement), la différence est nulle et le coefficient de Gini est alors décomposable additivement:

$$I(x_1,...,x_n) = I(m_1\vec{e}_{n_1},...,m_G\vec{e}_{n_G}) + \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g^2 m_g}{n^2 m} I(x_{g,1},...,x_{g,n_g})$$

$$= \sum_{g_1=1}^{G}\sum_{g_2=1}^{G} n_{g_1}n_{g_2}\frac{1}{2n^2 m}\left|m_{g_1}-m_{g_2}\right| + \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g^2 m_g}{n^2 m}\frac{1}{2n_g^2 m_g}\sum_{i=1}^{n_g}\sum_{j=1}^{n_g}\left|x_{g,i}-x_{g,j}\right|$$

5. Ecart moyen des logarithmes

Définition

L'écart moyen des logarithmes (encore appelé la déviation logarithmique moyenne) est égal à la moyenne des écarts entre le logarithme de la moyenne des revenus et le logarithme du revenu:

$$ML(x_1,...,x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\log m-\log x_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{m}{x_i}$$

Il peut aussi s'exprimer comme la moyenne des logarithmes des revenus relatifs, changée de signe:

$$ML_y(y_1,...,y_n)=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log y_i$$

ou tout simplement comme le logarithme de la moyenne géométrique des revenus relatifs, changé de signe:

$$ML_y(y_1,...,y_n)=-\log(m_y^*)$$

avec $m_y^*=\sqrt[n]{y_1...y_n}$ la moyenne géométrique des revenus relatifs.

Minimum-maximum

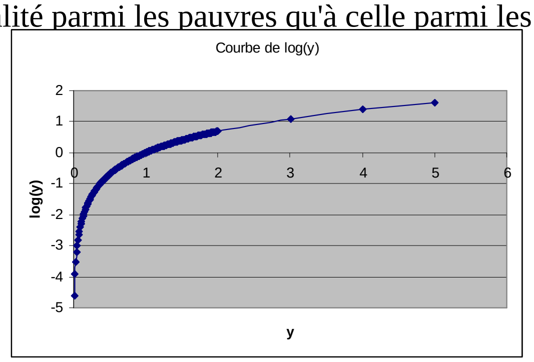
Cet indicateur est compris entre 0 (tous les revenus sont égaux) et $+\infty$ (dès qu'un revenu est nul). Ce résultat disqualifie cet indicateur si certains revenus peuvent être nuls.

Fonction d'utilité sous-jacente

Considérons l'indicateur d'inégalité $ML_y(y_1,...,y_n)$. Il peut s'exprimer comme une somme de perceptions individuelles de l'inégalité dépendant uniquement du revenu individuel:

$ML_y(y_1,...,y_n)=-\sum_{i=1}^{n}u(y_i)$, avec la fonction $u(y)=\frac{1}{n}\log y$. La fonction $u(y)$ est une fonction qui:

- n'est pas définie en 0 : cet indicateur devient inutilisable avec des revenus nuls;
- croissant, même très rapidement proche de 0 : cet indicateur est sensible à la présence de très petites valeurs;
- s'annule pour $y=1$ et continue à croître ensuite;
- a une concavité strictement concave ($u^{''}(y)=-\frac{1}{ny^2}<0$): un transfert infinitésimal dy d'un riche j vers un pauvre i entraîne une diminution de l'indicateur; la concavité étant plus importante parmi les pauvres, l'indicateur va accorder plus d'importance à l'inégalité parmi les pauvres qu'à celle parmi les riches.



Décomposition additive

On peut désagréger l'écart moyen des logarithmes en fonction des G classes disjointes:

$$ML(x_1,...,x_n) = ML(m_1\vec{e}_{n_1},...,m_G\vec{e}_{n_G}) + \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}ML(x_{g,1},...,x_{g,n_g})$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{g=1}^{G} -n_g \log(\frac{m_g}{m}) + \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\sum_{j=1}^{n_g} -\frac{1}{n_g}\log(\frac{x_{g,j}}{m_j})$$

Le premier terme mesure l'inégalité entre les classes (composante inter-classe). Il est égal à l'écart moyen des logarithmes sur la population où chaque revenu est remplacé par la moyenne des revenus.

Le deuxième terme mesure l'inégalité au sein de chacune des classes (composante intra-classe). Il est égal à la variabilité au sein de chaque classe, pondérée par la part de personnes dans la classe par rapport à la population.

Conséquence d'un transfert

La variation $dML_y(y_1,...,y_n)$ de l'écart moyen des logarithmes consécutive à un transfert infinitésimal dy d'un riche j vers un pauvre i entraîne une diminution de l'indicateur égale à:

$$dML_y(y_1,...,y_n) = -\frac{dh}{n}(\frac{1}{y_i} - \frac{1}{y_j}) < 0$$

Nous voyons que l'écart moyen des logarithmes accorde plus d'importance à l'inégalité parmi les pauvres qu'à l'inégalité parmi les riches.

Remarque: l'indicateur de Champernowne

L'indicateur $A(0) = 1 - \frac{1}{\exp(ML(x_1,...,x_n))} = 1 - m_y^*$ est aussi parfois utilisé. C'est l'indicateur de Champernowne; il correspond à l'indicateur d'Atkinson avec 0 comme paramètre. Cet indicateur est compris entre 0 (tous les revenus sont égaux) et 1 (dès qu'un revenu est nul).

6. Indice de Theil

Définition

L'indice de Theil peut être défini comme:

$$T(x_1,...,x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{m}\log(\frac{x_i}{m}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \log(y_i)$$

Minimum-maximum

L'indice de Theil est compris entre 0 (tous les revenus sont égaux) et $\log n$ (tous les revenus sont nuls sauf un).

Interprétation basée sur la notion d'entropie

Par analogie avec la théorie de l'information[1], définissons l'entropie de la distribution de revenus $(x_1,...,x_n)$ comme:

$$H(x_1,...,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{nm}\log(\frac{nm}{x_i}),$$

avec la convention $0\log\frac{1}{0}=0$. L'entropie $H(x_1...x_n)$ est maximale et égale à $H_{\max}(x_1,...,x_n) = \log n$ si tous les revenus sont égaux; l'entropie $H(x_1,...,x_n)$ est minimale et égale à $H_{\min}(x_1,...,x_n) = 0$ si tous les revenus sont nuls sauf un.

L'indice de Theil $T(x_1,...,x_n)$ apparaît comme la variation d'entropie entre une distribution de revenus parfaitement égalitaire et la situation réelle:

$$T(x_1,...,x_n) = \log n - \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{nm}\log(\frac{nm}{x_i}) = H(x_1,...,x_n)_{\max} - H(x_1,...,x_n).$$

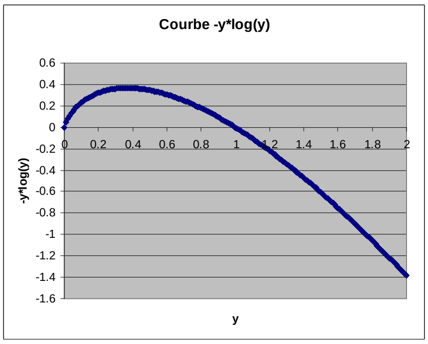
Fonction d'utilité sous-jacente

L'indice de Theil peut s'exprimer comme une somme de perceptions individuelles de l'inégalité: $T_y(y_1,...,y_n) = -\sum_{i=1}^{n} u(y_i)$ avec une fonction $u(y) = -\frac{1}{n} y \log y$ dépendant uniquement du revenu. La courbe $u(y)$ est une fonction qui:

---

[1] Cette notion d'entropie est dérivée de la théorie de l'information: l'entropie d'une distribution de probabilités $(p_1,..., p_n)$ sur un ensemble fini à n éléments (donc vérifiant $p_i \geq 0, \forall i = 1,..., n$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$) est définie par $\sum_{i=1}^{n} p_i \log(\frac{1}{p_i})$, avec la convention $0\log\frac{1}{0}=0$. Il y a davantage d'information/d'entropie dans une situation où un événement inhabituel est observé ($\exists i : p_i = 1$) que dans une situation où tous les événements sont similaires ($\forall i : p_i = \frac{1}{n}$) comme il y a davantage d'information contenue dans un retard observé chez une personne ponctuelle que dans un retard observé chez une personne arrivant toujours en retard.

- croît de 0 à $\frac{1}{e}$ $(\approx \frac{1}{2.7} \approx 0.37)$ ($u(y)$ va de 0 à $\frac{1}{e}(\approx 0.37)$) et décroît ensuite;
- s'annule pour $y = 1$;
- est strictement concave ($u^{''}(y) = -\frac{1}{ny} < 0$): la variation $dT_y(y_1,...,y_n)$ de l'indice de Theil consécutive à un transfert infinitésimal dy d'un riche j vers un pauvre i entraîne une diminution de l'indicateur; la concavité étant plus important parmi les pauvres, l'indice de Theil va accorder plus d'importance à l'inégalité parmi les pauvres qu'à celle parmi les riches.



Décomposition additive

On peut désagréger l'indice de Theil en fonction des G classes disjointes:

$$T(x_1 ... x_n) = T(m_1 \vec{e}_{n_1},...,m_G \vec{e}_{n_G}) + \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g m_g}{nm} T(x_{g,1},...,x_{g,n_g})$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{g=1}^{G} n_g \frac{m_g}{m} \log(\frac{m_g}{m}) + \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g m_g}{nm} \left[\sum_{j=1}^{n_g} \frac{x_{g,j}}{n_g m_g} \log(\frac{x_{g,j}}{m_g}) \right]$$

Le premier terme calcule l'indice de Theil sur la population où chaque revenu est remplacé par la moyenne arithmétique des revenus de sa classe (composante inter-classe).

Le deuxième terme mesure l'inégalité au sein de chacune des classes (composante intra-classe). Il est égal à la variabilité au sein de chaque classe, pondérée par la part de revenus dans la classe par rapport à la population.

Conséquence d'un transfert

La variation $dT_y(y_1,...,y_n)$ de l'indice de Theil consécutive à un transfert infinitésimal dy d'un riche j vers un pauvre i entraîne une diminution de l'indicateur égale à:

$$dT_y(y_1,...,y_n) = \frac{dh}{n}(\log y_i - \log y_j) < 0$$

Nous voyons que l'indice de Theil accorde plus d'importance à l'inégalité parmi les pauvres qu'à l'inégalité parmi les riches.

7. Indicateurs d'Atkinson

Définition

L'indicateur d'Atkinson $A_a(x_1,...,x_n)$ est défini par:

- si $a \neq 0$, par 1 moins la moyenne m_a d'ordre a de la distribution des revenus relatifs $(y_1,...,y_n)$:

$$A_a(x_1,...,x_n) = 1 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{m} \right)^a \right)^{\frac{1}{a}} = 1 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i^a \right)^{\frac{1}{a}} = 1 - m_a \ ,$$

  où $m_a = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i^a \right)^{\frac{1}{a}}$ est la moyenne d'ordre a de la distribution des $(y_1,...,y_n)$;

- si $a = 0$, par 1 moins la moyenne géométrique m^* de la distribution des revenus relatifs $(y_1,...,y_n)$:

$$A_0(x_1,...,x_n) = 1 - \sqrt[n]{\frac{x_1}{m} ... \frac{x_n}{m}} = 1 - \sqrt[n]{y_1 ... y_n} = 1 - m^*$$

  (indicateur de Champernowe).

Le paramètre a de l'indicateur d'Atkinson est limité aux valeurs $a < 1$.

Equivalence de l'indicateur d'Atkinson

L'indicateur d'Atkinson (également valable pour $a = 0$) ordonne l'inégalité de façon équivalente à l'indice de Theil généralisé avec $a < 1$ (voir la remarque à la fin du chapitre 1).

Remarques sur la moyenne m_a d'ordre a

1) Si $a = 1$, la moyenne m_1 d'ordre 1 est la moyenne arithmétique $m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$;
2) Si a tend vers 0, la moyenne m_a d'ordre a tend vers la moyenne géométrique $m^* = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} y_i}$;
3) Si $a = -1$, la moyenne m_{-1} d'ordre -1 est la moyenne harmonique $m^h = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i}}$.

Minimum-maximum

L'indicateur d'Atkinson est compris entre 0 (tous les revenus égaux) et 1 (dès qu'un revenu est nul) si $a \leq 0$ et $1 - n^{\frac{a-1}{a}}$ (tous les revenus sont nuls sauf un) si $a > 0$. Ce résultat disqualifie les indicateurs d'Atkinson avec $a \leq 0$ si certains revenus peuvent être nuls.

Fonction d'utilité sous-jacente

L'indicateur d'Atkinson est basé sur la fonction $W_{a\,y}(y_1,\ldots,y_n)$ de bien-être collectif ("welfare function"):

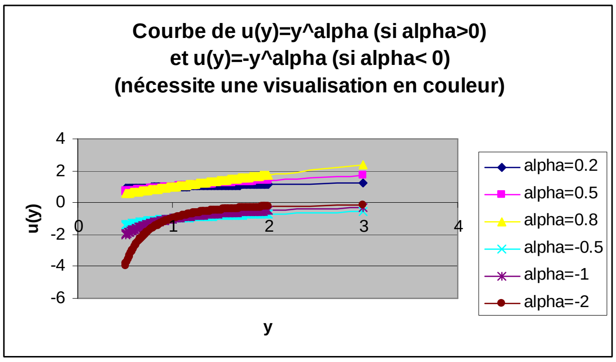
- $W_{a\,y}(y_1,\ldots,y_n)=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^a\right)^{\frac{1}{a}}-1$ pour $a\neq 0$ et $a<1$;
- $W_{a\,y}(y_1,\ldots,y_n)=\sqrt[n]{y_1\ldots y_n}-1$ pour $a=0$.

Si $a\neq 0$, on a

- si $1>a>0$, $W_{a\,y}(y_1,\ldots,y_n)$ ordonne l'inégalité de façon équivalente à $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^a$ qui est de la forme $\sum_{i=1}^{n}u(y_i)$ avec $u(y)=\frac{1}{n}y^a$, une fonction strictement concave, de dérivée seconde $u''(y)=a(a-1)y^{a-2}<0$;
- si $a<0$, $W_{a\,y}(y_1,\ldots,y_n)$ ordonne l'inégalité de façon équivalente à $-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^a$ qui est de la forme $\sum_{i=1}^{n}u(y_i)$ avec $u(y)=-\frac{1}{n}y^a$, une fonction strictement concave, de dérivée seconde $u''(y)=a(a-1)y^{a-2}<0$.

On peut en déduire (pour $a\neq 0$):

- un transfert d'un riche j vers un pauvre i entraîne une diminution de l'indicateur;
- la concavité étant plus important parmi les pauvres, l'indicateur va accorder plus d'importance à l'inégalité parmi les pauvres qu'à celle parmi les riches; cette caractéristique augmente avec a .



<u>Conséquence d'un transfert</u>

La variation $dA_{a\,y}(y_1,\ldots,y_n)$ de l'indicateur d'Atkinson consécutive à un transfert infinitésimal dy d'un riche j vers un pauvre i entraîne une diminution de l'indicateur égale à:

$$dA_{a\,y}(y_1,\ldots,y_n)=\frac{(1-A_{a\,y}(y_1,\ldots,y_n))^{1-a}\,dh}{n}((y_j)^{a-1}-(y_i)^{a-1})<0,$$

cette formule est également valable lorsque $a=0$. Nous voyons que l'indicateur d'Atkinson accorde plus d'importance à l'inégalité parmi les pauvres qu'à l'inégalité parmi les riches: à différence de revenus y_j-y_i constante, $|dA_{a\,y}(y_1,\ldots,y_n)|$ est d'autant plus élevée que les revenus sont faibles: $f(y) = -y^{a-1}$ est une fonction strictement concave. Cette caractéristique augmente avec a .

Références

Drescher, Jesper (1999). Income inequality decomposition by income source and by population subgroup. A theoretical overview and the empirical case of Denmark, Seminar.

Costa, Michele. The decomposition of income inequality measures.

Lambert, Peter J. & Aronson, J. Richard (1993). Inequality decomposition analysis and the Gini coefficient revisited, The Economic Journal, 103 (September), 1221-1227.

Sautory, Olivier (1996). Les principales mesures d'inégalité, Journées de méthodologie statistique 11 et 12 décembre 1996.

Martín-Guzmán, Pilar (2003). Concepts & Measurement of Inequality & Poverty, Course Notes, TES Institute, 31 March to 4 April 2003 (Libourne)